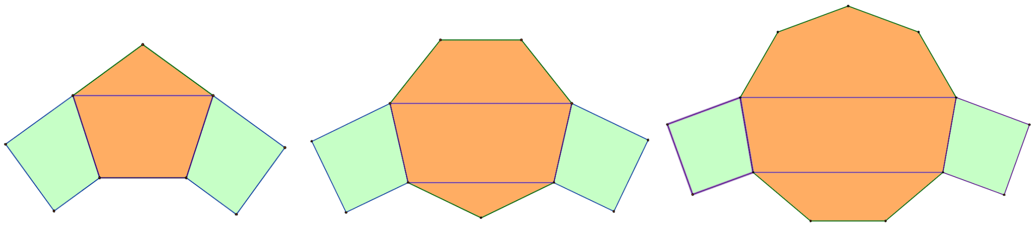
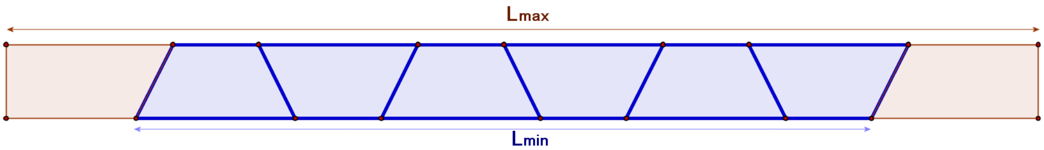
POLÍGONOS COM NUDOS. MEDICIONES

Observaciones iniciales

Si construimos varios polígonos para posteriormente deshacerlos y observar los pliegues que se forman, descubrimos:



1º. La cinta de papel queda dividida en trapecios iguales dispuestos con la base mayor en la parte inferior de la cinta y con la base menor en la parte superior alternativamente.



2º. Todos los trapecios contienen el centro del polígono.

3º. Dado que el polígono construido deja sobrantes de cinta a ambos lados, cada sobrante ocupa un lado, por lo que si el polígono tiene N lados, N-2 quedarán sin sobrante.

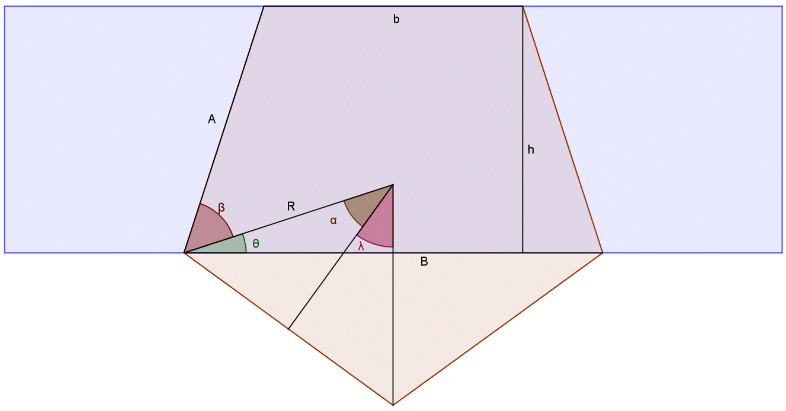
4º. De los lados sin sobrante:

$$E\left[\frac{N-2}{2}\right]$$ lados quedarán sobre los lados con sobrante

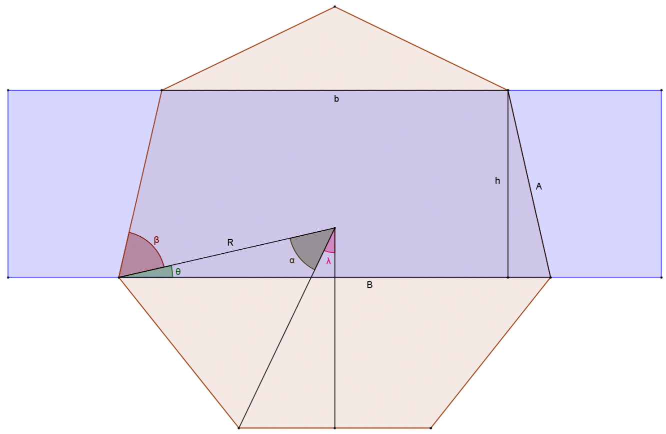
$$E\left[\frac{N-2}{2}\right]+1$$ lados quedarán bajo los lados con sobrante

Croquis

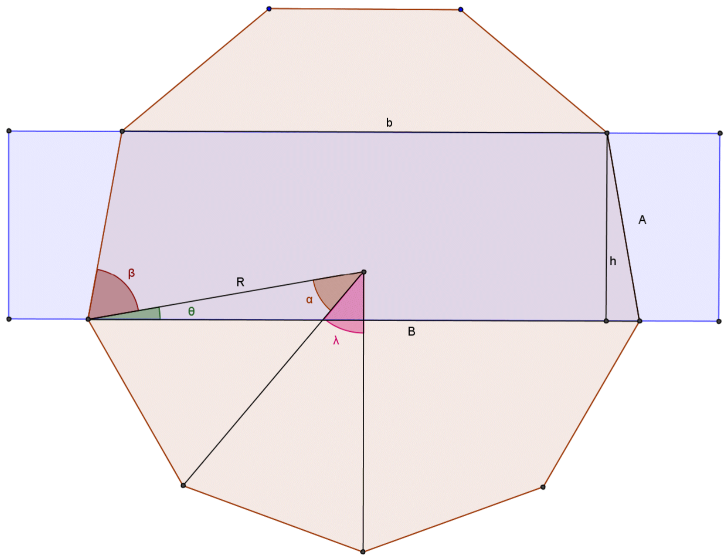
PENTÁGONO



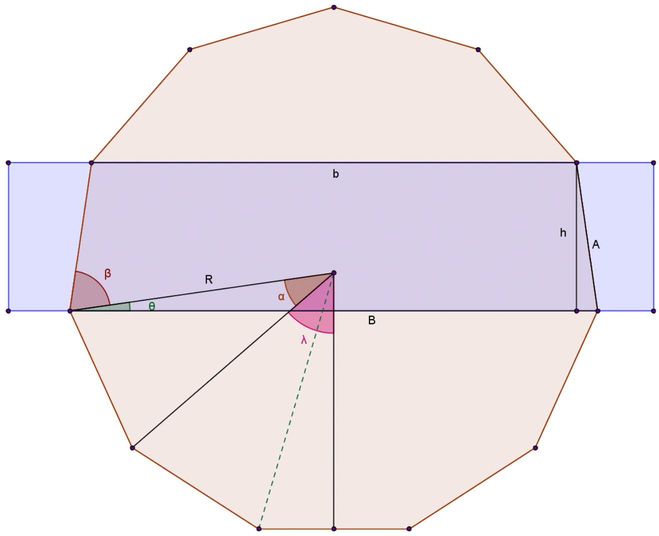
HEPTÁGONO



NONÁGONO



UNDECÁGONO



Mediciones

Llamaremos:

N = Número de lados.

h = Ancho de la cinta.

L_{min} = Longitud minima de la cinta (a calcular) para realizar los nudos.

ÁNGULO CENTRAL: $\alpha = \frac{2\pi}{N}$

ÁNGULO INTERIOR: $2\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$

$\lambda = \frac{N-5}{2} \cdot \alpha$

Llamamos: $\varphi = \alpha + \lambda$

Observamos que:

Polígono de 5 lados $\lambda = 0 = \frac{0\alpha}{2}$

Polígono de 7 lados $\lambda = \frac{\alpha}{2} = \frac{1\alpha}{2}$

Polígono de 9 lados $\lambda = \alpha = \frac{2\alpha}{2}$

Polígono de 11 lados $\lambda = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2}$

Podemos concluir que $\lambda = \frac{(N-5)}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{(N-5)\alpha}{4}$

$$\varphi = \alpha + \lambda = \alpha + \frac{(N-5)}{4} \cdot \alpha = \frac{2\pi}{N} + \frac{(N-5)}{4} \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{N}\left(1 + \frac{N-5}{4}\right) = \frac{2\pi}{N}\left(\frac{N-1}{4}\right) = \frac{N-1}{2N} \cdot \pi$$

dependerá de los lados del polígono a construir

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2N} \cdot \pi = \frac{N\pi}{2N} - \frac{\pi(N-1)}{2N} = \frac{\pi}{2N}$$

ÁNGULO MENOR:

$$\varepsilon = \beta + \theta = \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\pi}{2N} = \frac{(\pi - \alpha)N}{2N} + \frac{\pi}{2N} = \frac{\pi(N+1) - \alpha N}{2N}$$

Lado: $A = \frac{h}{\mathrm{sen}(\varepsilon)}$

$\cos(\omega) = \frac{h}{A} \Rightarrow \omega = \arccos\left(\frac{h}{A}\right)$

ÁNGULO MAYOR:

$\gamma = \frac{\pi}{2} + \omega$

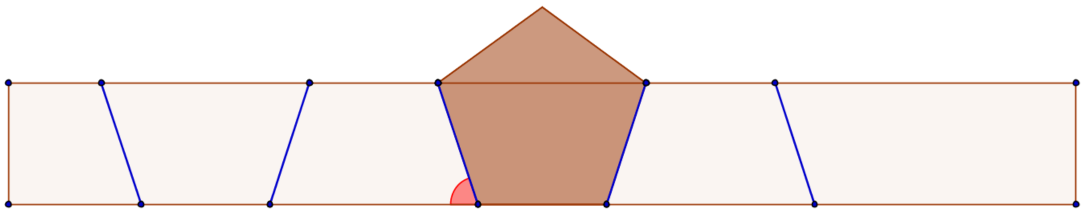
APOTEMA: $a = \frac{A}{2 \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

RADIO: $R = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + a^2}$

BASE MAYOR DE TRAPECIO: $B = 2 \cdot R \cdot \cos(\theta)$

BASE MENOR DE TRAPECIO: $b = B - 2 \cdot A \cdot \cos(\varepsilon)$

CINTA:



Número de trapecios: $N_T = N - 1$

La longitud mínima de la cinta para poder construir un polígono estará formada por igual número de trapecios derechos que invertidos: $L_{min} = \frac{N_T}{2} \cdot (B_G + b_p)$