

COPO DE KOCH. PROGRAMACIÓN EN PHP PDF

PROCESO DE CONSTRUCCIÓN

ITERACIÓN 0

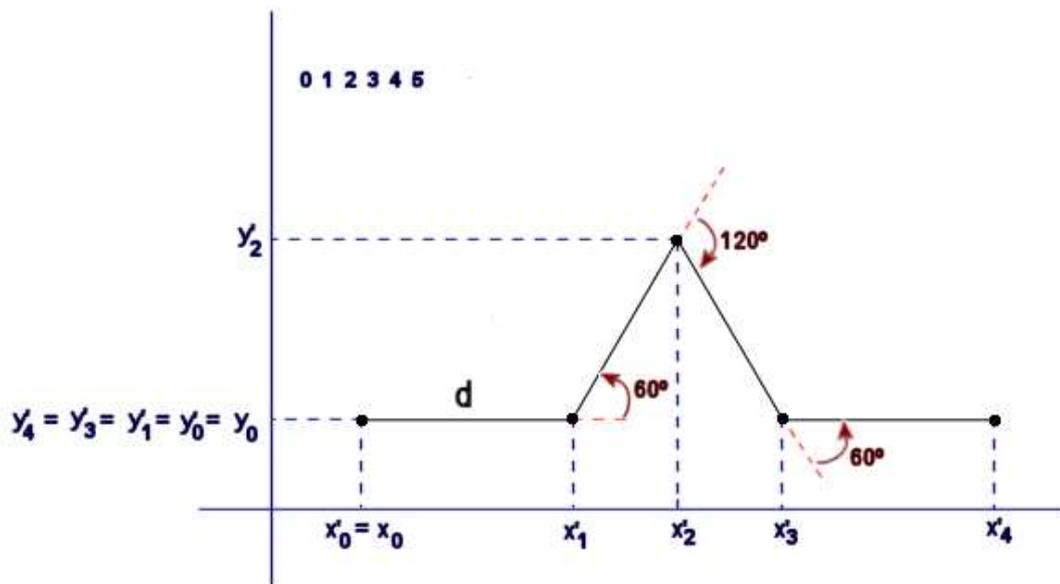


La longitud del segmento es $D_0 = d$

El número de puntos es $n_0 = 2$

El número de segmentos es $s_0 = 1$

ITERACIÓN 1

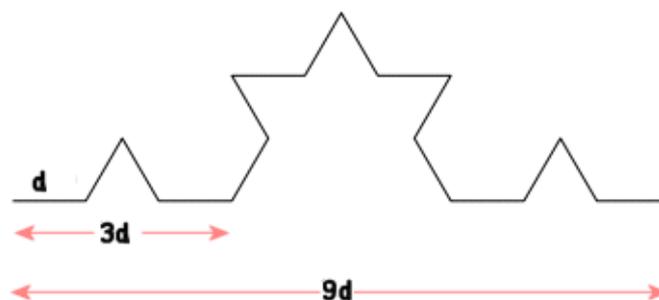


La longitud del segmento es $D_1 = 3 \cdot d$

El número de puntos es $n_1 = 5$

El número de segmentos es $s_1 = 4$

ITERACIÓN K





En la iteración 2ª:

La longitud del segmento es $D_2 = 3^2 \cdot d$

El número de puntos es $n_2 = 17 = 4^2 + 1$

El número de segmentos es $s_2 = 16 = 4^2$

Así sucesivamente:

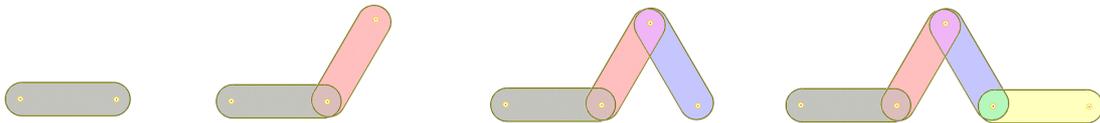
En la iteración Kª:

La longitud del segmento es $D_k = 3^k \cdot d$

El número de puntos es $n_k = 4^k + 1$

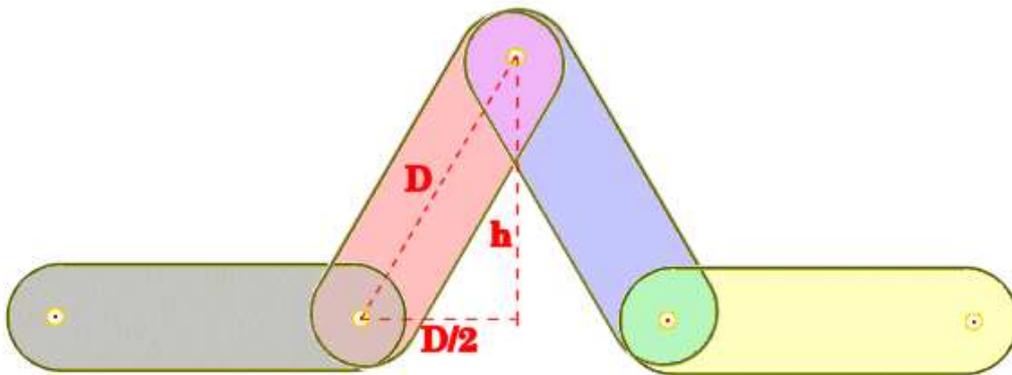
El número de segmentos es $s_k = 4^k$

La secuencia para formar un bloque a partir del anterior es:



Calculemos la altura que alcanza:

$$h = \sqrt{(D_{k-1})^2 - \left(\frac{D_{k-1}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4(D_{k-1})^2}{4} - \frac{(D_{k-1})^2}{4}} = \sqrt{\frac{3(D_{k-1})^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot D_{k-1}}{2}$$



Partimos de un bloque fijado en el plano.

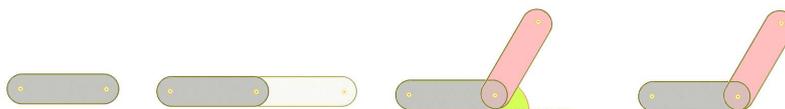
En el primer movimiento (I), realizamos una traslación a la derecha según el vector $(D,0)$. Efectuamos un giro $\rho = 60^\circ$ (sentido antihorario).

En el segundo movimiento (II), trasladamos el bloque primitivo según el vector $\left(\frac{D}{2}, \frac{\sqrt{3} \cdot D}{2}\right)$. A continuación lo giramos un ángulo $\rho = -60^\circ$ (sentido horario)

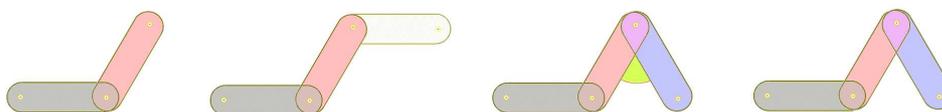
Por último, el tercer movimiento (III) consistirá en trasladar el bloque primitivo según el vector $(D,0)$. No efectuamos giro $\rho = 0$ (sentido horario)



I



II

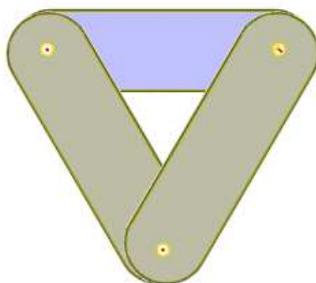


III

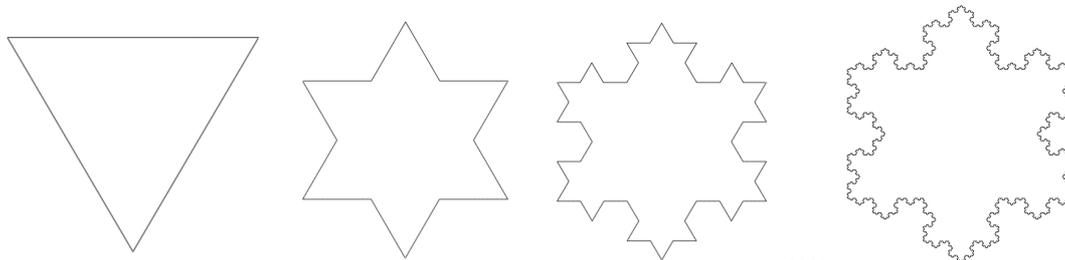


Así quedará construido el bloque de la iteración actual.

A partir de aquí, cada vez que queramos formar el copo de Koch, bastará con fijar el último bloque construido y sobre los extremos izquierdo y derecho colocar sendos bloques girados 120° en sentido antihorario y horario respectivamente:



Con esto, las tres primeras iteraciones y la 6ª son:



TRATAMIENTO DE LOS BLOQUES POR CADA ITERACIÓN

Debemos tener en cuenta que al hacer coincidir los extremos de los bloques, aparecerán puntos duplicados. Al final, antes de "cerrar" cada bloque, eliminaremos los duplicados.



Tomamos un bloque de la iteración $k-1$, que tiene un número de puntos:
 $n_{k-1} = 4^{k-1} + 1$ colocados en las tablas X_0 e Y_0

Iteración actual:

Fijamos bloque:

$$\begin{cases} X_1 = X_0 \\ Y_1 = Y_0 \end{cases} \text{ con esto, tendremos creados los } 4^{k-1} + 1 \text{ primeros puntos}$$

colocados en los índices 1 a $4^{k-1} + 1$

Movimiento I:

$$\text{Traslación según } (D_{k-1}, 0) \begin{cases} X_1' = X_0 + D_{k-1} \\ Y_1' = Y_0 \end{cases}$$

$$\text{Giro de centro } (X_1', Y_1') \text{ y ángulo } \rho = 60^\circ \begin{cases} X_1 = X_1' + D_{k-1} \cdot \cos(\rho) \\ Y_1 = Y_1' + D_{k-1} \cdot \sen(\rho) \end{cases}$$

con esto, tendremos creados los $4^{k-1} + 1$ siguientes puntos, que en total hacen
 $2(4^{k-1} + 1) = 2 \cdot 4^{k-1} + 2$, colocados en los índices $4^{k-1} + 2$ a $2 \cdot 4^{k-1} + 2$

Movimiento II:

$$\text{Traslación según } \left(\frac{D_{k-1}}{2}, \frac{\sqrt{3} \cdot D_{k-1}}{2} \right) \begin{cases} X_1'' = X_0 + \frac{D_{k-1}}{2} \\ Y_1'' = Y_0 + \frac{\sqrt{3} \cdot D_{k-1}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Giro de centro } (X_1'', Y_1'') \text{ y ángulo } \rho = -60^\circ \begin{cases} X_1 = X_1'' + D_{k-1} \cdot \cos(\rho) \\ Y_1 = Y_1'' + D_{k-1} \cdot \sen(\rho) \end{cases}$$

con esto, tendremos creados los $4^{k-1} + 1$ siguientes puntos, que en total hacen
 $(2 \cdot 4^{k-1} + 2) + (4^{k-1} + 1) = 3 \cdot 4^{k-1} + 3$, colocados en los índices
 $2 \cdot 4^{k-1} + 3$ a $3 \cdot 4^{k-1} + 3$

Movimiento III:

$$\text{Traslación según } (2D_{k-1}, 0) \begin{cases} X_1 = X_0 + 2 \cdot D_{k-1} \\ Y_1 = Y_0 \end{cases}$$

con esto, tendremos creados los $4^{k-1} + 1$ siguientes puntos, que en total hacen
 $(3 \cdot 4^{k-1} + 3) + (4^{k-1} + 1) = 4 \cdot 4^{k-1} + 4 = 4^k + 4 =$

$$= (4^k + 1) + 3 = n_k + 3$$

colocados en los índices $3 \cdot 4^{k-1} + 4$ a $4 \cdot 4^{k-1} + 4 = n_k + 3$



Es decir, hay 3 puntos más que son los duplicados ya mencionados, y por tanto los eliminamos.

Para formar las iteraciones en modo BUCLE, al finalizar cada iteración, seguiremos la secuencia de pasos siguientes:

- 1º.- Borrar las tablas X_0 e Y_0
- 2º.- Crear nuevas tablas X_0 e Y_0 vacías
- 3º.- Copiar las tablas X_1 e Y_1 en X_0 e Y_0 respectivamente
- 4º.- Borrar las tablas X_1 e Y_1

Comenzar con la siguiente iteración creando las tablas X_1 e Y_1 y repitiendo los 4 pasos anteriores.

La 6ª iteración queda como la siguiente:

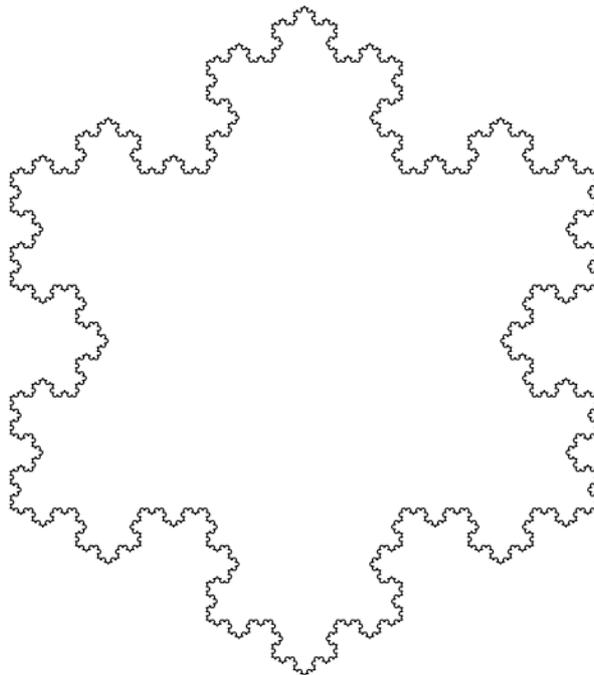
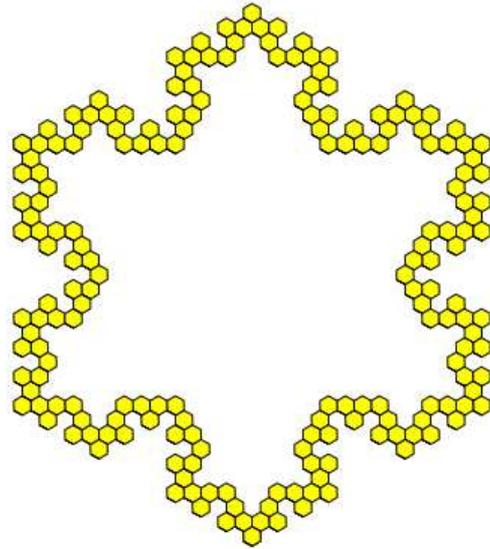
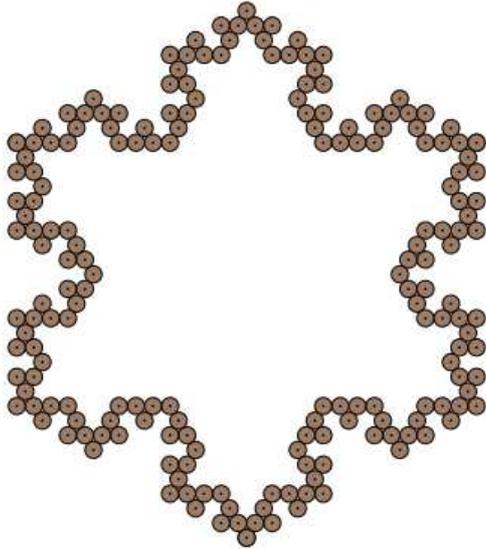


FIGURA BASE

Todo este proceso se ha realizado tomando como figura base un segmento de longitud d .

Si en lugar de un segmento, utilizamos un círculo o un hexágono regular obtendríamos copos semejantes:



CODIFICACIÓN A PDF

No hay problemas importantes a la hora de codificar en PHP-PDF salvo que el sistema de coordenadas tiene el origen en el vértice superior izquierdo de la hoja; el eje X aumenta hacia la derecha, pero el eje Y funciona al revés, aumenta hacia abajo, por lo que los dibujos saldrán invertidos verticalmente salvo que corriamos esta diferencia.