TRIÁNGULO EQUILÁTERO. SECUENCIA

POR PLIEGUES SUCESIVOS EN UNA CINTA DE PAPEL

Trazamos un primer pliegue de inclinación arbitraria.

Llamaremos α_0 al ángulo menor que forma el eje de plegado con la base de la cinta.

A partir de aquí, seguiremos la siguiente secuencia utilizando el último pliegue:

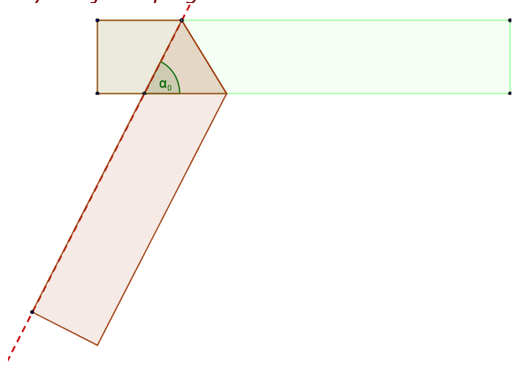
a) Si el último pliegue es ascendente (de izquierda a derecha):

Plegar la cinta haciendo coincidir el lado superior con el eje del último plegado.

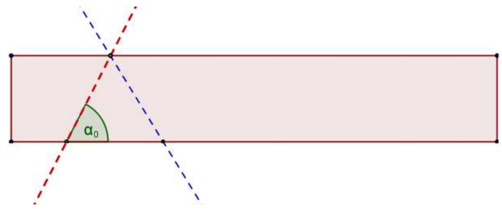
b) Si el último pliegue es descendente (de izquierda a derecha):

Plegar la cinta haciendo coincidir el lado inferior con el eje del último plegado.

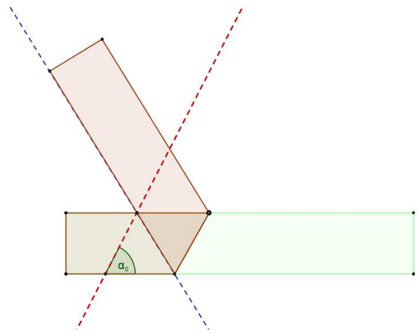
Efectuando estos dobleces hacia arriba y abajo alternativamente, siguiendo el doblez anterior, estaremos en realidad realizando dobleces según la bisectriz de cada ángulo determinado por el lado superior o inferior de la cinta y el eje de plegado anterior:



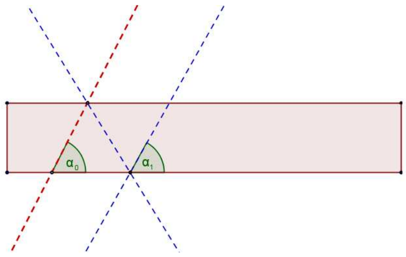
Recomponemos la cinta y marcamos el pliegue efectuado:



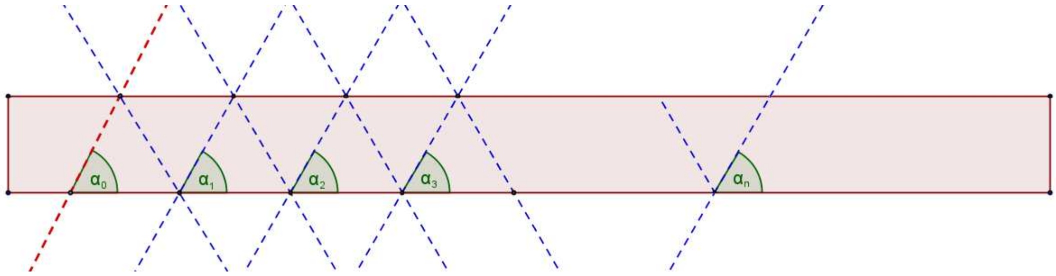
Seguimos la secuencia, plegando hacia arriba:



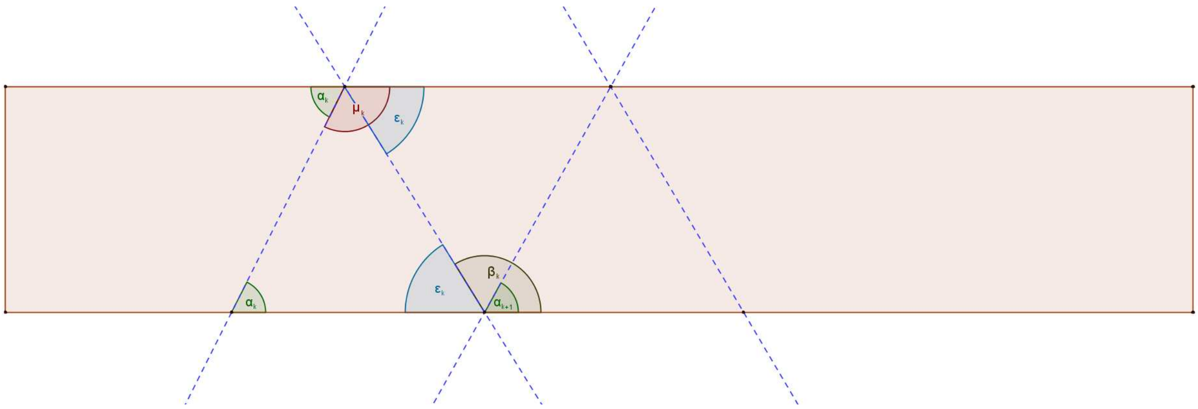
Nuevamente, recomponemos la cinta, marcamos el pliegue y nombramos el ángulo menor que se forma con el lado inferior, α_1:



Continuando esta secuencia, conseguiremos una sucesión de ángulos $(\alpha_n)_{n\in N}$:



Supongamos que, llegado al ángulo α_k pretendemos valorar α_{k+1}:



Siguiendo la valoración de ángulos ordenadamente:

$\mu_k = 180 - \alpha_k$

Como ε_k se forma con la bisectriz de μ_k:

$$\varepsilon_k = \frac{\mu_k}{2} = \frac{180 - \alpha_k}{2}$$

en cuyo caso:

$$\beta_k = 180 - \varepsilon_k = 180 - \frac{180 - \alpha_k}{2} = 90 + \frac{\alpha_k}{2}$$

Y como α_{k+1} se forma con la bisectriz de β_k:

$$\alpha_{k+1} = \frac{\beta_k}{2} = \frac{90 + \frac{\alpha_k}{2}}{2} = 45 + \frac{\alpha_k}{4}$$

Así pues, comenzando con el primer ángulo y siguiendo esta construcción:

$$\alpha_1 = 45 + \frac{\alpha_0}{4}$$

$$\alpha_2 = 45 + \frac{\alpha_1}{4} = 45 + \frac{45 + \frac{\alpha_0}{4}}{4} = 45 + \frac{45}{4} + \frac{\alpha_0}{16}$$

$$\alpha_3 = 45 + \frac{\alpha_2}{4} = 45 + \frac{45 + \frac{45}{4} + \frac{\alpha_0}{16}}{4} = 45 + \frac{45}{4} + \frac{45}{16} + \frac{\alpha_0}{64}$$

Así sucesivamente:

$$\alpha_k = \frac{45}{4^0} + \frac{45}{4^1} + \frac{45}{4^2} + \cdots + \frac{45}{4^{k-1}} + \frac{\alpha_0}{4^k} = 45 \cdot \left(\frac{1}{4^0} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{k-1}} \right) + \frac{\alpha_0}{4^k} =$$

$$= 45 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} + \frac{\alpha_0}{4^k}$$

El término $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j}$ es una serie finita geométrica de razón $\frac{1}{4}$, y cuya suma es:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} = \frac{\frac{1}{4^{k-1}} \cdot \frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{4^k}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{4^k}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^k} \right)$$

Así pues:

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \left(45 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{4^j} + \frac{\alpha_0}{4^k} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(45 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^k} \right) + \frac{\alpha_0}{4^k} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(45 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^k} \right) \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_0}{4^k} \right) = 45 \cdot \frac{4}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4^k} \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_0}{4^k} \right) = 45 \cdot \frac{4}{3} = 60$$

Por tanto, siguiendo la secuencia descrita por los sucesivos pliegues, los ángulos terminarán convergiendo en 60º.

Un razonamiento similar nos afirmaría que los triángulos que se forman entre pliegues convergen en uno equilátero.

Supongamos que el primer pliegue realizado arroja un ángulo con valor $30 < \alpha_0 < 90$, que es un valor muy sencillo de conseguir.

La siguiente tabla muestra los sucesivos ángulos que vamos construyendo:

MENOR	ÁNGULO	MAYOR
30,0000	a_0	90,0000
52,5000	a_1	67,5000
58,1250	a_2	61,8750
59,5313	a_3	60,4688
59,8828	a_4	60,1172
59,9707	a_5	60,0293
59,9927	a_6	60,0073
59,9982	a_7	60,0018
59,9995	a_8	60,0005
59,9999	a_9	60,0001
60,0000	a_{10}	60,0000
60,0000	a_{11}	60,0000

y observamos que con 10 pliegues (dobles) alcanzamos el ángulo deseado.