RESUMEN SOBRE MOSAICOS

CONCEPTOS

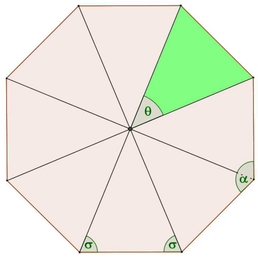
POLÍGONOS REGULARES

ÁNGULOS DE POLÍGONOS

Tomemos un polígono regular genérico de **n** lados.
En un polígono regular, todos sus lados son iguales, así que si trazamos los radios que unen su centro con cada vértice obtendremos tantos triángulos isósceles iguales como lados tiene el polígono.

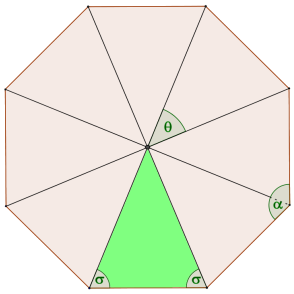
Ángulo central θ

Es el ángulo que se forma en el centro con uno de los triángulos isósceles.
Como todos los triángulos son iguales, sus ángulos centrales también:



$$\theta = \frac{360}{n}$$

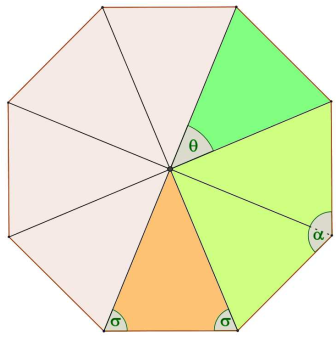
Si todos los triángulos interiores son isósceles, los ángulos opuestos al central han de ser iguales, y como todos suman 180:



$$2\sigma + \theta = 180 \Rightarrow \sigma = \frac{180 - \theta}{2}$$

Ángulo interior α

Es el ángulo que se forma en el interior de un polígono en torno a un vértice.
Como nuestros polígonos son regulares, todos sus ángulos interiores son iguales:



$$\alpha = 2\sigma = 2 \cdot \frac{180 - \theta}{2} = 180 - \theta$$

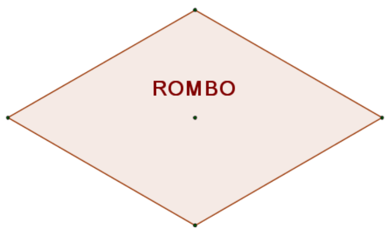
PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL (PF):

Paralelogramo determinado por dos vectores linealmente independientes. Sendas traslaciones determinadas por dichos vectores terminan teselando el plano.

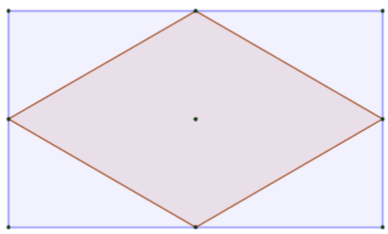
CENTRADO:

Es un ***rombo*** que se enmarca centrado dentro de un rectángulo.

PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL = ROMBO



PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL

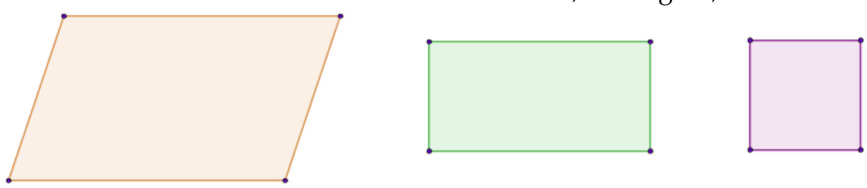


Rombo centrado
y enmarcado en un rectángulo

PRIMITIVO:

En otro caso, es decir, ***otro tipo de paralelogramo***. En este caso coincide con la célula

PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL: romboide, rectángulo, cuadrado

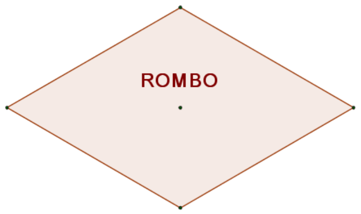


PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL

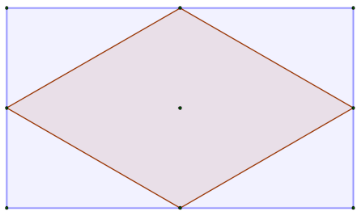
CÉLULA FUNDAMENTAL (CF):

PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL CENTRADO:

CÉLULA FUNDAMENTAL = RECTÁNGULO (que lo enmarca)



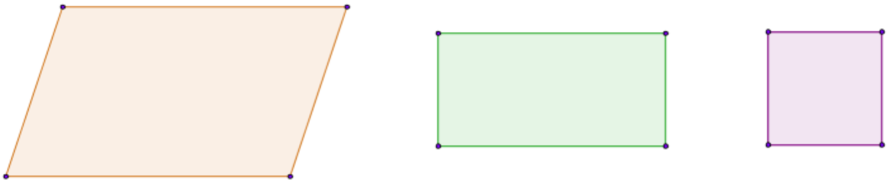
PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL



CÉLULA FUNDAMENTAL

<u>PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL PRIMITIVO</u>:

CÉLULA FUNDAMENTAL = PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL



PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL = CÉLULA FUNDAMENTAL

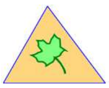
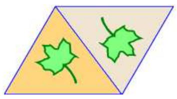
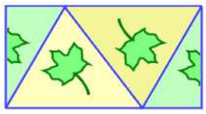
MOTIVO:

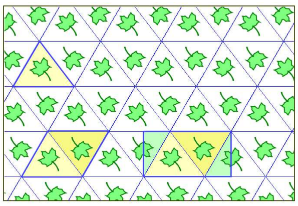
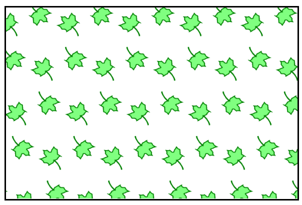
Motivo, dibujo o diseño que se establece para generar un mosaico.

BALDOSA INICIAL (BI):

Polígono que contiene el motivo que mediante transformaciones isométricas se genera un paralelogramo que coincide con el fundamental.

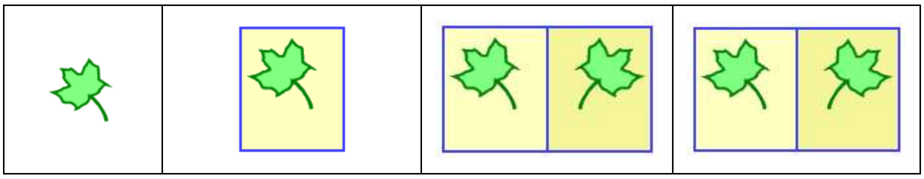
Ejemplo1 (GRUPO p211)

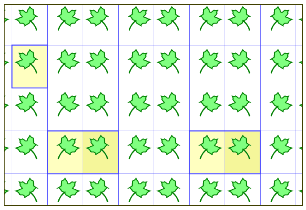
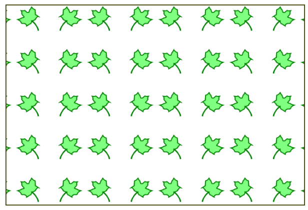
MOTIVO	BALDOSA	PARALELOGRAMO. FUNDAMENTAL.	CÉLULA FUNDAMENTAL.
			

TESELACIÓN TRAMADA	TESELACIÓN SIN TRAMAR
	

Ejemplo2: (GRUPO p1m1)

MOTIVO	BALDOSA	PARALELOGRAMO. FUNDAMENTAL.	CÉLULA FUNDAMENTAL.



TESELACIÓN TRAMADA	TESELACIÓN SIN TRAMAR
	

CLASIFICACIÓN CRISTALOGRÁFICA

NOMENCLATURA. GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS.

Cada grupo cristalográfico se nombra con cuatro símbolos de la forma: **axyz**

Símbolo "a".

Letra "**p**" o "**c**".
Denota si paralelogramo fundamental es centrado o no.

- ☑ **c => centrado**. El paralelogramo fundamental es un rombo que se puede incluir centrándolo en un rectángulo.
- ☑ **p => primitivo**. En otro caso.

De los 17 grupos, son centrados: **cm** y **cmm**.

Símbolo "x".

Un numero **1,2,3,4 o 6**.
Indica el mayor orden de rotación (número máximos de giros para dejar la figura en su posición inicial:

- ☑ 1 => ángulo de 360º
- ☑ 2 => ángulo de 180º
- ☑ 3 => ángulo de 120º
- ☑ 4=> ángulo de 90º
- ☑ 6 => ángulo de 60º

Símbolo "y".

Una letra o numero: "**m**", "**g**", o "**1**".
Indica el tipo de simetría:

- ☑ **m** =>("mirror" = espejo) simetría especular o axial
- ☑ **g** =>(glide = deslizamiento simetría con deslizamiento.
- ☑ **1** => sin simetría.

Símbolo "z".

Una letra o numero: "**m**", "**g**", o "**1**".
Igual que el símbolo "y" con respecto a un segundo tipo de ejes de simetría.

CLASIFICACIÓN

GRUPOS DE SIMETRÍA SIN GIROS, ORDEN DE GIRO N= 1:

4 GRUPOS DE SIMETRÍAS:

- p1: Dos traslaciones
- cm: Una simetría axial y una simetría con deslizamiento
- perpendicular
- pg: Dos simetrías con deslizamiento paralelas
- pm: Dos simetrías axiales y una traslación

GRUPOS DE SIMETRÍA CON GIROS DE 180º, ORDEN DE GIRO N= 2:

5 GRUPOS DE SIMETRÍAS:

- p2: Tres simetrías centrales (o giros de 180º)
- cmm: Dos simetrías axiales perpendiculares y una simetría central
- pmm: Cuatro simetrías axiales en los lados de un rectángulo (2 horizontales y 2 verticales)
- pmg: Una simetría axial y dos simetrías centrales
- pgg: Dos simetrías con deslizamiento perpendiculares

·GRUPOS DE SIMETRÍA CON GIROS DE 120° , ORDEN DE GIRO N= 3:

3 GRUPOS DE SIMETRÍAS.

- p3: Dos giros de 120º
- p31m: Una simetría axial y un giro de 120º
- p3m1: Tres simetrías axiales en los lados de un triangulo equilátero (ángulos 60º , 60º , 60º)

·GRUPOS DE SIMETRÍA CON GIROS DE 90° , ORDEN DE GIRO N= 4 Y 2:

3 GRUPOS DE SIMETRÍAS.

- p4: Una simetría central (o giro de 180º) y un giro de 90º
- p4m: Tres simetrías axiales en los lados de un triangulo de ángulos 45º , 45º , 90º
- p4g: Una simetría axial y un giro de 90º

GRUPOS DE SIMETRÍA CON GIROS DE 60° , ORDEN DE GIRO N= 6,3 Y 2:

2 GRUPOS DE SIMETRÍAS:

- p6: Una simetría central y un giro de 120º
- p6m: Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo de ángulos 30º, 60º , 90º

CLASIFICACIÓN MORFOLÓGICA

Según concurran en un vértice varios polígonos, podremos obtener distintas configuraciones. Cada configuración se nombrará con los lados que tengan cada polígono, procurando siempre que sea posible, ordenarlos en orden ascendente, en sentido horario y separados por comas.
Así, 3,3,4,3,4 indica que siguiendo el movimiento de las agujas de un reloj, encontraremos dos triángulos equiláteros, un cuadrado, otro triángulo equilátero y por último un cuadrado, para cerrar el vértice sin dejar huecos.

CLASIFICACIÓN:

REGULARES (los polígonos que confluyen en cada vértice son todos iguales)
SEMIRREGULARES(los polígonos que confluyen en cada vértice no son todos iguales)
- SEMIRREGULARES UNIFORME U HOMOGÉNEO (confluyen siempre los mismos)
- SEMIRREGULARES NO UNIFORMES O NO HOMOGÉNEOS (se necesitan otros polígonos para cerrar los huecos)

Para formar un mosaico con polígonos regulares, debemos adosar distintos polígonos en torno a un vértice de modo que no queden huecos y no se monten las figuras, es decir, *la suma de los ángulos interiores de las distintas figuras que concurren en un vértice ha de ser 360*.

Supongamos que vamos a adosar **k** figuras regulares de $\mathbf{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ lados respectivamente.
La suma de los ángulos interiores es:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 360 \Rightarrow$$

$$(180 - \theta_1) + (180 - \theta_1) + \cdots + (180 - \theta_k) = 360 \Rightarrow$$

$$\left(180 - \frac{360}{n_1}\right) + \left(180 - \frac{360}{n_2}\right) + \cdots + \left(180 - \frac{360}{n_k}\right) = 360 \Rightarrow$$

$$180 \cdot \left[\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{2}{n_k}\right)\right] = 360 \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{2}{n_k}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\left(1 + 1 + \overset{k}{\cdots} + 1\right) - \left(\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \cdots + \frac{2}{n_k}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$k - 2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}\right) = \frac{k-2}{2}$$

¿Cuáles son los valores extremos de k? es decir, ¿Cuál es el mínimo y el máximo de polígonos que podemos adosar en torno a un vértice?
- Si el mínimo fuesen dos, uno de ellos debería tener un ángulo interior menor de 180º para poder formar un polígono regular, en cuyo caso el otro debería tener un ángulo interior mayor que 180º, que es imposible, por lo que el número mínimo de polígonos regulares que podemos adosar es de 3.
- El polígono regular con el ángulo interior más pequeño de todos es el triángulo, cuyo ángulo interior es de 60º, y obviamente podremos adosar hasta 6 triángulos.

Así pues, los valores extremos de k son 3 y 6.

Los 21 tipos

De la expresión $\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}\right)=\frac{k-2}{2}$, iremos valorando los distintos resultados que se presentan, teniendo en cuenta que $\mathbf{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ son números naturales:

$k = 3$

$$\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{n_2\cdot n_3}{n_1\cdot n_2\cdot n_3}+\frac{n_1\cdot n_3}{n_1\cdot n_2\cdot n_3}+\frac{n_1\cdot n_2}{n_1\cdot n_2\cdot n_3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{n_2\cdot n_3+n_1\cdot n_3+n_1\cdot n_2}{n_1\cdot n_2\cdot n_3}=\frac{1}{2}$$

$$2\cdot(n_2\cdot n_3+n_1\cdot n_3+n_1\cdot n_2)=n_1\cdot n_2\cdot n_3$$

$$2\cdot n_2\cdot n_3+2\cdot n_1\cdot n_3+2\cdot n_1\cdot n_2-n_1\cdot n_2\cdot n_3=0$$

$$n_3\cdot(2\cdot n_2+2\cdot n_1-n_1\cdot n_2)=-2\cdot n_1\cdot n_2$$

$$n_3=\frac{2\cdot n_1\cdot n_2}{n_1\cdot n_2-2\cdot(n_1+n_2)}$$

Nº	n_1	n_2	n_3
1	3	7	42
2	3	9	18
3	3	8	24
4	3	10	15
5	3	12	12
6	4	6	12
7	4	8	8
8	5	5	10
9	6	6	6
10	4	5	20

$k = 4$

$$\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}\right)=\frac{4-2}{2}=1$$

$$\left(\frac{n_2\cdot n_3\cdot n_4}{n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot n_4}+\frac{n_1\cdot n_3\cdot n_4}{n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot n_4}+\frac{n_1\cdot n_2\cdot n_4}{n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot n_4}+\frac{n_1\cdot n_2\cdot n_3}{n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot n_4}\right)=1$$

$$\left(\frac{n_2\cdot n_3\cdot n_4+n_1\cdot n_3\cdot n_4+n_1\cdot n_2\cdot n_4+n_1\cdot n_2\cdot n_3}{n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot n_4}\right)=1$$

$$n_2\cdot n_3\cdot n_4+n_1\cdot n_3\cdot n_4+n_1\cdot n_2\cdot n_4+n_1\cdot n_2\cdot n_3=n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot n_4$$

$$n_4\cdot(n_1\cdot n_2+n_1\cdot n_3+n_2\cdot n_3-n_1\cdot n_2\cdot n_3)=-n_1\cdot n_2\cdot n_3$$

$$n_4=\frac{n_1\cdot n_2\cdot n_3}{n_1\cdot n_2\cdot n_3-(n_1\cdot n_2+n_1\cdot n_3+n_2\cdot n_3)}$$

Nº	n_1	n_2	n_3	n_4
11	3	3	6	6
12	3	6	3	6
13	3	4	4	6
14	3	4	6	4
15	3	3	4	12
16	3	4	3	12
17	4	4	4	4

$k = 5$

$$\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}\right)=\frac{5-2}{2}=\frac{3}{2}$$

Nº	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
18	3	3	3	3	6
19	3	3	4	3	4
20	3	3	3	4	4

$k = 6$

$$\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}\right)=\frac{6-2}{2}=2$$

Nº	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
21	3	3	3	3	3	3

nº	TIPO	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	SUMA INV	(k-2)/2
1	R	3	3	3	3	3	3	2	2
2	U	3	3	3	3	6		1.5	1.5
3	U	3	3	3	4	4		1.5	1.5
4	U	3	3	4	3	4		1.5	1.5
5	N	3	3	4	12			1	1
6	N	3	4	3	12			1	1
7	U	3	6	3	6			1	1
8	U	3	3	6	6			1	1
9	U	3	4	6	4			1	1
10	U	3	6	4	4			1	1
11	R	4	4	4	4			1	1
12	N	3	7	42				1	0.5
13	N	3	8	24				0.5	0.5
14	N	3	9	18				0.5	0.5
15	N	3	10	15				0.5	0.5
16	U	3	12	12				0.5	0.5

17	N	4	5	20				0.5	0.5
18	U	4	6	12				0.5	0.5
19	U	4	8	8				0.5	0.5
20	N	5	5	10				0.5	0.5
21	R	6	6	6				0.5	0.5

regulares	R		uniformes	U		No uniformes	N