FRACTALES FÁCILES

¿QUÉ ES UN FRACTAL?

Un **FRACTAL** es un objeto cuya estructura se repite a diferentes escalas. Se caracterizan por:

- *Infinitud. Se repite infinitamente, sin origen ni final.*
- *Autosimilitud. Una parte del objeto tiene la misma forma y estructura que el todo.*

ORÍGENES

Aunque los orígenes datan de 1890, de la mano de Henri Poincaré, no fue hasta la década de los 70 cuando Benoît Mandelbrot, con el apoyo de la computación digital, investigó a fondo estas estructuras.

Fue en un congreso de matemáticas en 1967, cuando Mandelbrot presentó su artículo ¿Cuánto mide la costa británica?. Su respuesta fue INFINITO.

FRACTAL deriva del latín FRANGERE (romper, trocear), cuyo participio pasivo es ***FRACTUS*** (fracturado, roto, quebrado).

LONGITUD DE UN TRAMO DE RÍO SEGURA (MAPAS MTN25 - HOJA 891-C3)

TRAMO COMPRENDIDO ENTRE PUENTE DE ALAMBRE (CIEZA) Y PUENTE NUEVO (BLANCA)

Con un compás de medir, y a distintas aberturas, vamos midiendo la longitud de este tramo de río.

Comprobaremos que cuanto más pequeña es la abertura del compás, mayor es la longitud del tramo. Esto es obvio, pues con unidades de medida grandes, perdemos una infinidad de detalles, a los que iremos accediendo conforme disminuimos la unidad de medida.

Habida cuenta que siempre podremos obtener unidades de medición cada vez más pequeñas, la longitud del río crecerá cada vez más, por lo que matemáticamente la longitud será infinita.

HOJA	ORIGEN :	PUENTE DE ALAMBRE. CIEZA			ESCALA		UNIDAD DE MEDIDA	
891-C3	FINAL :	PUENTE NUEVO. BLANCA			1:24518,05		1 dm	
ABERTURA COMPÁS (mm) [a]	PARTES DE LA UNIDAD [r]	NÚMERO DE PASOS ENTEROS	SOBRANTE DEFECTO t (mm)	SOBRANTE FRACCIÓN	Nº PASOS N[r]	DISTANCIA PLANO (mm) d_0	DISTANCIA REAL (m) d'_0	LONGITUD (km) L
95,00	0,95	3	12,06	0,13	3,13	297,06	7283331,93	7283,332
80,00	0,8	3	72,06	0,90	3,90	312,06	7651102,68	7651,103
60,00	0,6	5	49,00	0,82	5,82	349,00	8556799,45	8556,799
40,00	0,4	9	0,86	0,02	9,02	360,86	8847583,52	8847,584
20,00	0,2	18	17,16	0,86	18,86	377,16	9247227,74	9247,228
10,00	0,1	42	0,64	0,06	42,06	420,64	10313272,55	10313,273
4,34	0,0434	123	0,60	0,14	123,14	534,42	13102936,28	13102,936

CLASIFICACIÓN (SIMPLE)

LINEALES

Se generan a partir de algoritmos lineales. Pueden obtenerse mediante trazados geométricos simples.

EJEMPLOS: Triángulo de Sierpinski, Copo de Koch.

COMPLEJOS

Se construyen mediante el llamado "algoritmo de escape". Consiste en establecer una condición. Para cada punto se construye una serie o sucesión hasta que se cumpla dicha condición (o no).

EJEMPLOS: Conjunto de Mandelbrot, Conjunto de Julia.

AUTÓMATAS CELULARES

Estructuras generadas por una unidad (célula) con reglas específicas de propagación condicionadas por las características de las unidades vecinas.

EJEMPLOS: Crecimientos tumorales, Propagación de incendios forestales.

PLASMA

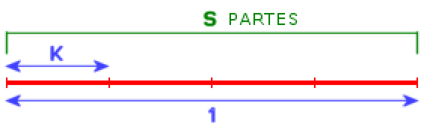
Proceso aleatorio recursivo, depende del azar, por lo que no hay dos iguales.

EJEMPLOS: Nubes, Paisaje

DIMENSIÓN FRACTAL

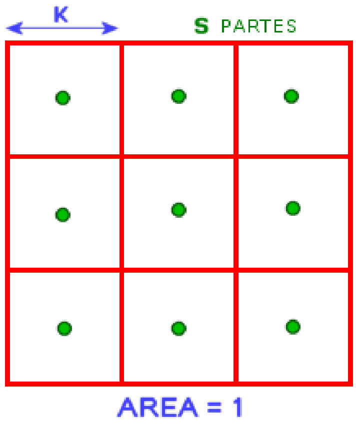
Dimensión topológica

Si consideramos un segmento de longitud **1** y lo dividimos en partes iguales de longitud **K** tendremos **S** partes iguales, de tal modo que la longitud total será igual al producto del número de partes por la longitud de cada una:



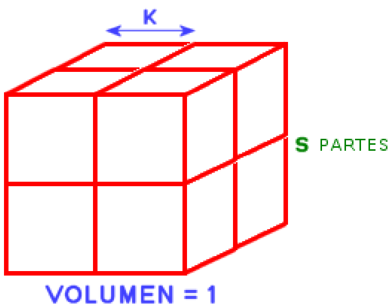
$$\boxed{S \cdot K = 1}$$

Si consideramos un cuadrado de superficie **1** y lo dividimos en cuadrados iguales de lado **K** tendremos **S** partes iguales, de tal modo que la superficie total será igual al producto del número de partes por la superficie de cada una:



$$\boxed{S \cdot K^2 = 1}$$

Si consideramos un cubo de volumen **1** y lo dividimos en cubos iguales de arista **K** tendremos **S** partes iguales, cada una de ellas será la parte **L=1/K** del lado total, de tal modo que el volumen total será igual al producto del número de partes por el volumen de cada una:



$$\boxed{S \cdot K^3 = 1}$$

Generalizando esta expresión:

$$\boxed{S \cdot K^D = 1}$$

Despejando:

$$S \cdot K^D = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{K^D} = \left(\frac{1}{K}\right)^D \Rightarrow \log(S) = \log\left(\left(\frac{1}{K}\right)^D\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(S) = D \cdot \log\left(\frac{1}{K}\right) \Rightarrow D = \frac{\log(S)}{\log\left(\frac{1}{K}\right)}$$

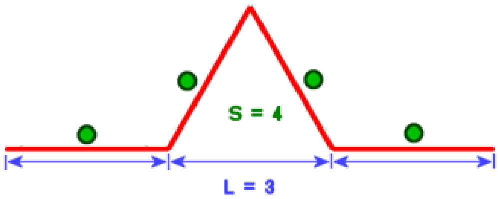
Llamando $L = \frac{1}{K}$ es la fracción de la unidad $\boxed{D = \frac{\log(S)}{\log(L)}}$

Podemos considerar:

S = Número de partes iguales en que dividimos una unidad

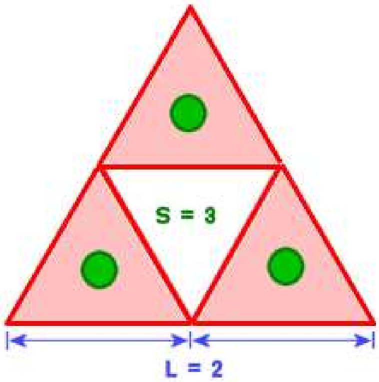
L = Factor de escala

COPO DE KOCH



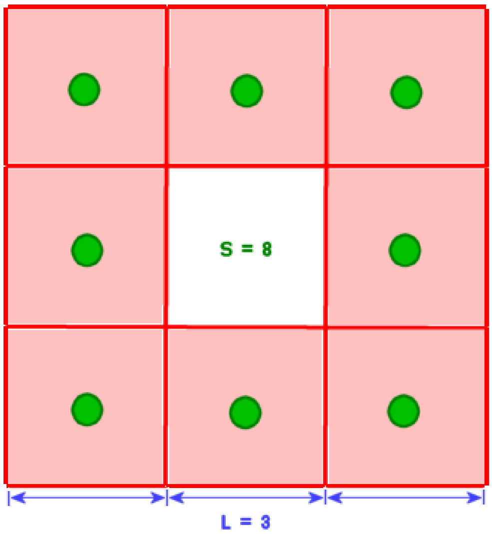
$$D = \frac{\log(S)}{\log(L)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,262$$

TRIÁNGULO DE SIERPINSKI



$$D = \frac{\log(S)}{\log(L)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1,585$$

ALFOMBRA DE SIERPINSKI



$$D = \frac{\log(S)}{\log(L)} = \frac{\log(8)}{\log(3)} = 1,893$$

CURIOSIDADES

► En 1978, los ingenieros de Boeing Aircraft estaban diseñando aviones experimentales. Un ingeniero informático, **Loren Carpenter**, ayudaba a mostrar la apariencia de aviones en vuelo, pero incrustar la imagen de un avión sobre un paisaje resultaba un tanto complicado. Fue entonces cuando este ingeniero, leyendo el libro "FORMAS, AZAR Y DIMENSION", de Benoît Mandelbrot, se le ocurrió utilizar las formas fractales para crear paisajes. El resultado lo plasmó en un video, "Vol Libre" que puede considerarse como en pistoletazo de salida a la utilización de los fractales en el cine. (Por cierto, Loren Carpenter creó con otros socios la conocida PIXAR)

► En la siguiente imagen aparece una muestra de cubertería fractal. ¿Adivinas en qué fractales están inspirados?

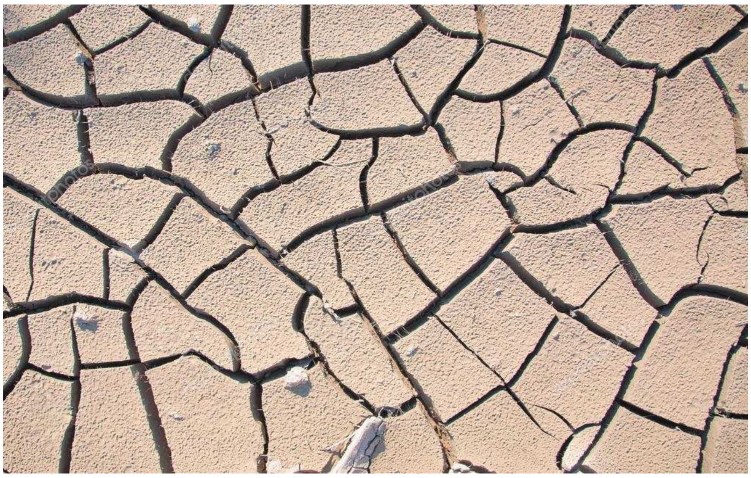
En la película "La ira del Kan", de la saga Star Trek, se generó el planeta GÉNESIS mediante técnicas fractales

FRACTALES POR TODAS PARTES

Relámpagos y rayos

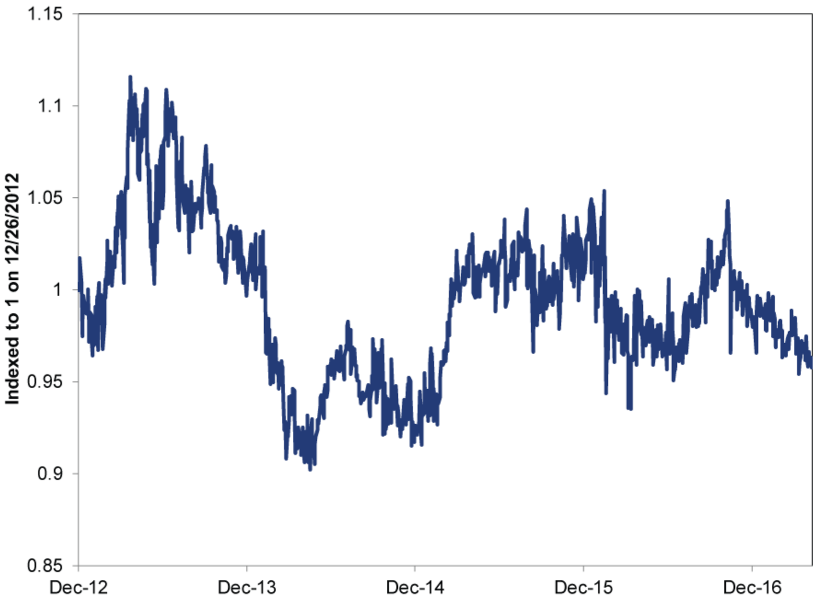
Helechos

Barro agrietado

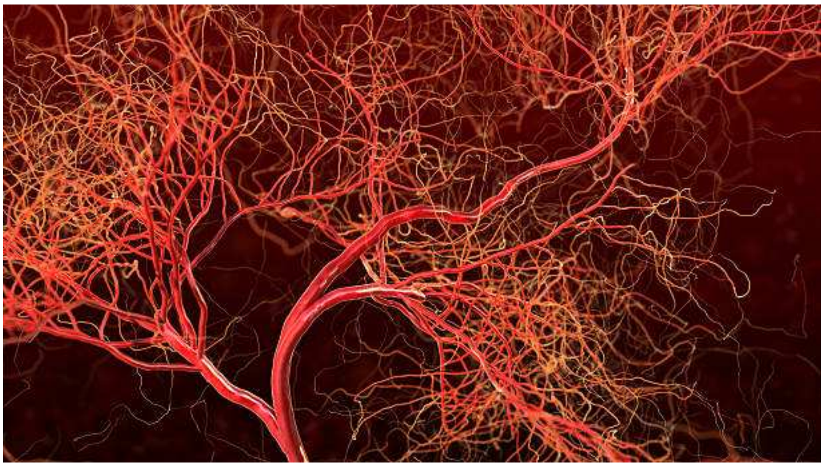


Romanescu

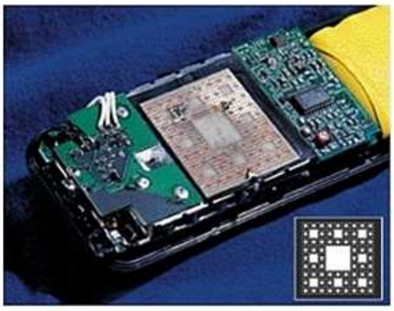
Fluctuaciones bursátiles



Sistema Vascular



Antenas de telecomunicaciones

ALGUNOS TIPOS DE FRACTALES

Conjunto de MANDELBRROT

En el plano complejo, si $c \in \mathbb{C}$ se construye la sucesión recurrente:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n + c \end{cases}$$

Si la sucesión está acotada, entonces c pertenece al conjunto, y si no lo está, lo excluimos.

Así, por ejemplo:

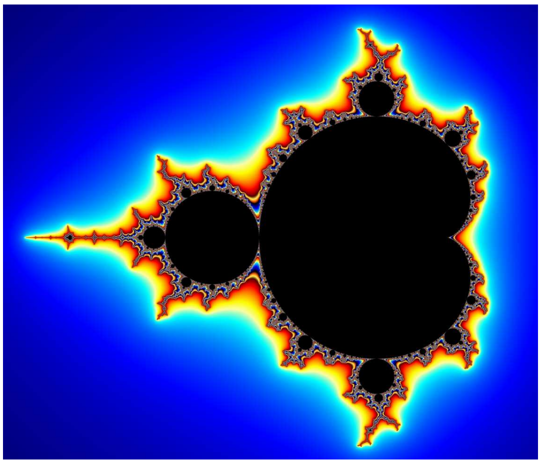
a) para $c = 2$, la sucesión es $0,2,6,38,...$ no está acotada

b) para $c = \frac{1}{2}$, la sucesión es $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, ...$ no está acotada

Tengamos en cuenta que en estos dos ejemplos, el número "c" tiene de parte imaginaria "0".

En la imagen inferior, se ha representado con colores la "velocidad" de divergencia, es decir, cuanto más claro es el color, más rápido diverge.

En color negro aparecen todos los valores complejos que generan series acotadas.



Plasma fractal

Existen varios métodos para construir un plasma, el más conocido es el de DIAMANTE CUADRADO.

Consiste en realizar un cuadrado y a cada esquina asignarle un color aleatorio.

A continuación dividimos el cuadrado en cuatro trazando divisiones por los puntos medios de los lados del cuadrado principal, y asignando un color aleatorio intermedio a los colores que "rodean" cada nuevo punto.

Repitiendo esto sucesivamente, se consigue una imagen del plasma fractal.

Paisaje fractal

Basado en el plasma fractal, pero en esta ocasión en lugar de asignar colores, asignamos alturas.

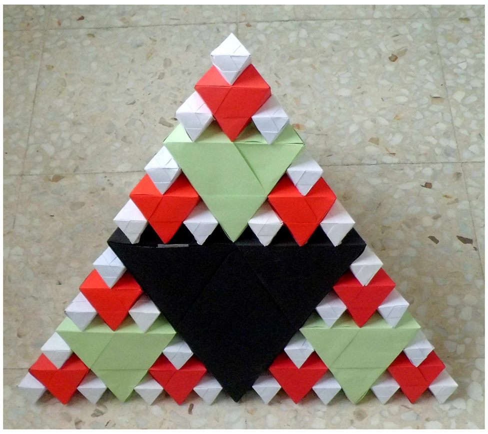
Como fondo de cielo podemos obtener un plasma sobre el color blanco y azul exclusivamente.

Tetraedro de Sierpinski

Sobe un tetraedro regular, marcamos los puntos medios de cada arista y trazamos 5 tetraedros, vaciando el central.

Sobre cada uno de los cuatro restantes realizamos el mismo proceso.

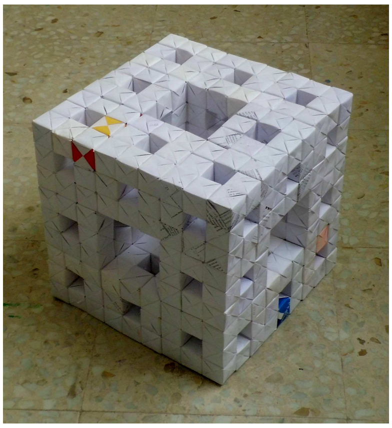
El tetraedro de Sierpinski será "LO CONTRARIO" a la imagen inferior, es decir, el tetraedro de Sierpinski estará formado por los ESPACIOS VACÍOS que forman los huecos.



Esponja de Menger

Sobre un cubo regular establecemos 27 divisiones (27 cubos menores obtenidos al dividir cada arista en tres partes iguales) y eliminamos el cubo central de cada cara y en central del cubo completo. Quedarán así 20 cubos.

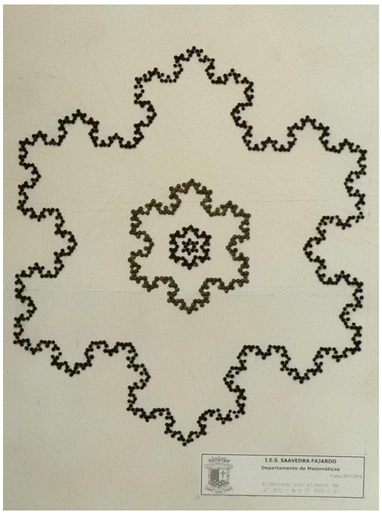
Si sobre cada uno de estos 20 cubos realizamos la misma operación sucesivamente, obtenemos la esponja de Menjer.



Copo de Koch

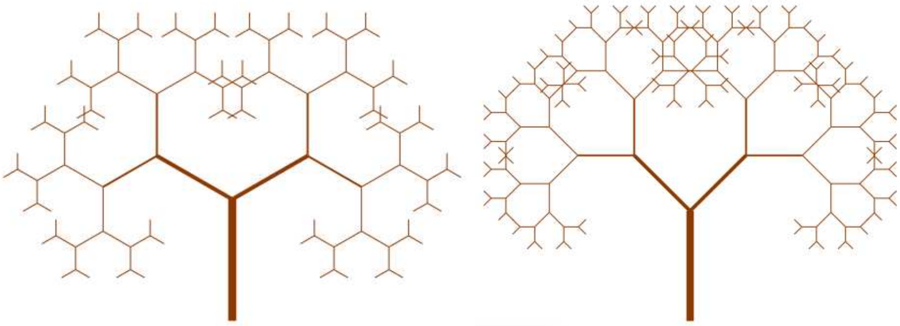
Dividimos un segmento de longitud fija en tres partes iguales, suprimimos la central y sobre este hueco levantamos un triángulo equilátero (sin base). Obtendremos así cuatro segmentos, y sobre cada uno de ellos procedemos del mismo modo.

Cuando hayamos alcanzado un nivel de detalle adecuado, copiamos la estructura girándola 120º en sentido horario y antihorario. Juntando las tres estructuras obtenemos el copo de Koch.



Árbol fractal

Dibujamos un segmento de grosor y longitud determinada. A continuación trazamos dos ramas simétricas al eje determinado por el tronco madre, de grosores y longitudes la mitad; de cada una de estas ramas procedemos del mismo modo, y así sucesivamente.

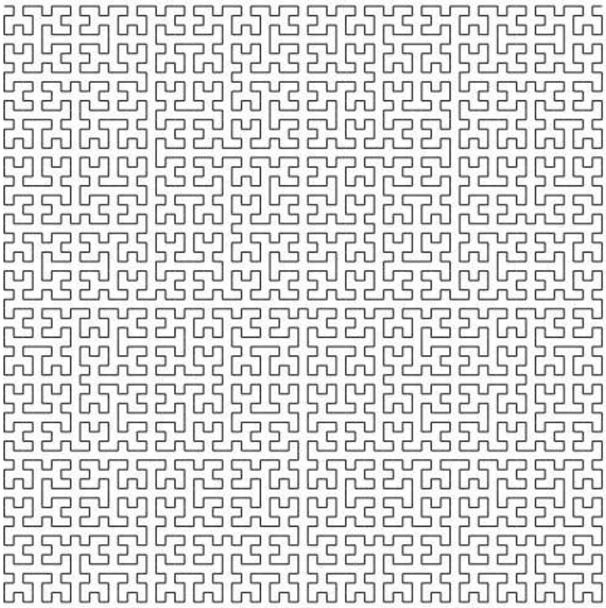


¿Y si generamos troncos curvos (por ejemplo con curvas Bezier) del que salen un número aleatorio de ramas con ángulos aleatorios? ¿Y si terminamos la última iteración con un número de hojas aleatorio, de distinto tamaño y color?.

El resultado es un fractal de apariencia de árbol.

Curva de Hilbert

Tomamos un cuadrado y lo dividimos en cuatro. Ahora trazamos segmentos continuos que unan los centros de los cuatro cuadrados sin que los segmentos se superpongan. A continuación, volvemos a dividir cada cuadrado en otros cuatro, y trazamos segmentos que unan todos los centros sin superponerse. Repitiendo esto sucesivamente, llegamos a la curva.

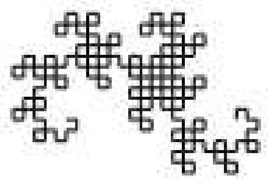


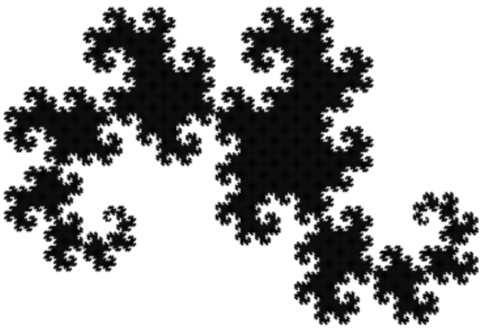
Polvo de Cantor (peine)

Dividimos un segmento en tres iguales eliminando el central. A continuación realizamos la misma operación con cada uno de los segmentos restantes, y así sucesivamente.

Dragón de Heighway

Tomamos una cinta de longitud determinada y doblamos por la mitad. A continuación doblamos el bloque por la mitad y en el mismo sentido , y así sucesivamente. Si desplegamos los dobleces en ángulos de 90º, tendremos el Dragón:





RECORTABLES

- CONJUTO DE CANTOR
- TRIANGULO DE SIERPINSKI
- ESCALERA FRACTAL
    - LIBRO FRACTAL
    - LÁMPARA FRACTAL

- DRAGÓN DE HEIGHWAY